Постановка:  
Дан отрезок [a,b] и ф-ия f(x), интегрируемая на этом отрезке.   
На отрезке построена сетка. Значения ф-ии на узлах сетки известны.  
Необходимо найти приближенное значение интеграла ф-ии на этом отрезке.

Задание:

Исследовать метод Чебышева с 4-мя узлами для нахождения интеграла ф-ий и сравнить эффективность метода для гладких и негладких ф-ий.

Алгоритм и требования:

Меняя подынтегральную функцию каким-либо интерполяционным многочленом, получаем квадратурные формулы, где xk - выбранные узлы интерполяции; Ak - коэффициенты, зависящие только от выбора узлов, но не от вида функции (k=0,1,2,........,n); R - остаточный член, или погрешность квадратурной формулы.

Разбив отрезок интегрирования [a, b] на n равных частей получим следующее:***xi= xo+ i..h;***( i = 0,1,2,......,n) ***xo= a; xn= b; h= (b-a)/n.***Вычислим подынтегральную функцию в полученных узлах : ***yi= f(xi);***( i = 0,1,2,......,n)

Считая, что y=xK (k=0,1,2..,n), получим линейную систему из n+1 уравнений, где (k=0,1,..,n), из которой можно определить коэффициенты А0,А1,..,АN. Определитель системы есть определитель Вандермонда.

Рассмотрим квадратурную формулу Чебышева: пусть дана функция f(x) в виде многочлена f(x)=ao+a1x+...+anxn . Проинтегрировав, преобразовав и подставив значения многочлена в узлах.

Задача сводится к подбору чисел Cn, x1, x2, x3 … xn  в формуле

(\*)

Заметим, что =

С другой стороны, сумма, стоящая в правой части равенства (\*) будет равна

Из этого следует

Приравняем коэф. при a1, a2, a3 … an-1 в левой и правой частях нер-ва:

Остановка осуществляется по правилу Рунге:

Остаточный член: R[f] == O(h^8)

2 \* O( (h/2)^8 ) == 1/2^7 \* O(h^8) == O(h^8) / 128

2^(2\*3+1) -1 == 2^7 -1 == 127

|Ih – Ih/2|/127 < eps  
Где I\* - точное значение, I – численное.

Тестовый пример:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| i | xi | yi |
| 1 | 0.102673 | 0.102492 |
| 2 | 0.406204 | 0.395125 |
| 3 | 0.593796 | 0.559512 |
| 4 | 0.897327 | 0.781662 |

**f(x) = sin(x); где a=0; b = 1; при n=4**

x1= (a+b)/2+(b-a)/2 \* t1= 1 + 1\*(-0,794654)=0.102673

x2= (a+b)/2+(b-a)/2\*t2=1+1 \* (-0,187592)=0.406204

x2= (a+b)/2+(b-a)/2\*t3=1+1 \* 0,187592=0.593796

x1= (a+b)/2+(b-a)/2 \* t4= 1 + 1\*0,794654=0.897327

y1=sin(x1) = sin(0,131489)=0.102492

y2=sin(x2) = sin(0,490985)=0.395125

y3=sin(x3) = sin(0,785)= 0.559512

y4=sin(x4) = sin(0,509015)= 0.781662

I = (0.102492+0.395125 + 0.559512 + 0.781662 )/4 = 0.4597  
  
I\* = 0.4

596976941318603

Контрольные тесты:

F(x) = 3x^6 - 7x^5 + 3x^3 -17x^2 +2x -1

Отрезок [-2;0]

Требуемая точность будет рассматриваться то 1 до 10 знаков после запятой.

Fa(x) = |3x^6 - 7x^5 + 3x^3 -17x^2 +2x -1| - негладкая ф-ия.

Угол в точке -1.21918

I\* = 66.1904761904

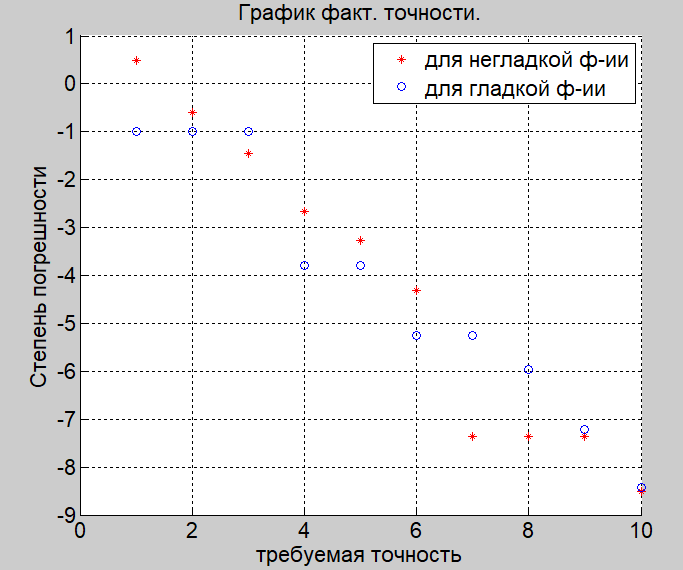
I\*a = 84.736318075313989

Модульная структура программы:

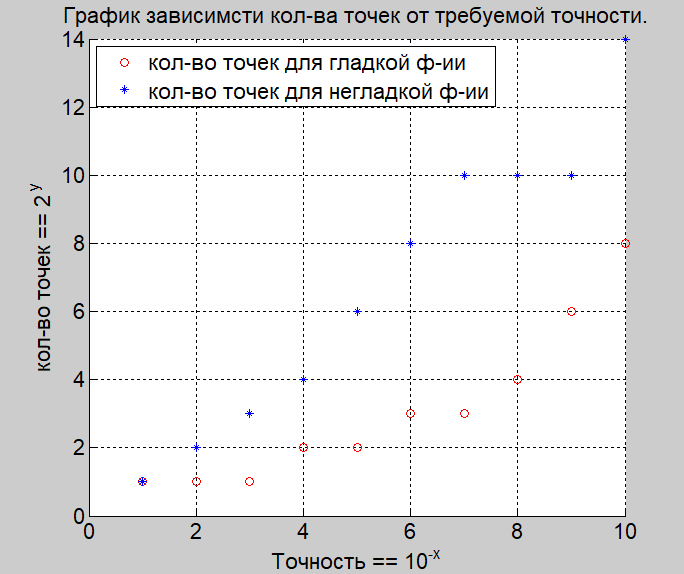
int main(void) – считывает необходимую точность, отрезок и тип ф-ии, вызывает Cheb и при удовлетворинии правилу Рунге **выводит в файл кол-во разбиений и фактическую точность.**

double Cheb(double a, double b, int F\_Type) – принимает на вход границы отрезка и тип функции, считает методом Чебышева интеграл, **возвращает его численное значение**.

Численный Анализ:



Фактическая точность гладкой ф-ии превосходит негладкую. Кроме того, для ее достижения требуется больше итераций. В вычислениях до 7-9 порядка факт. точность негладкой ф-ии превосходит гладкую, так как этого кол-ва итераций было достаточно, чтобы погрешность сразу стала меньше 10^-9.



Для негладкой ф-ии требуется гораздо больше итераций. В среднем, в 4-8 раз больше.

Вывод:

Выбор шага и промежуточных точек (х1 … х4), а так же сама ф-ия и ее гладкость сильно влияют на точность метода. Лучше всего он работает с гладкими ф-иями. А быстрее всего – с небольшими промежутками.